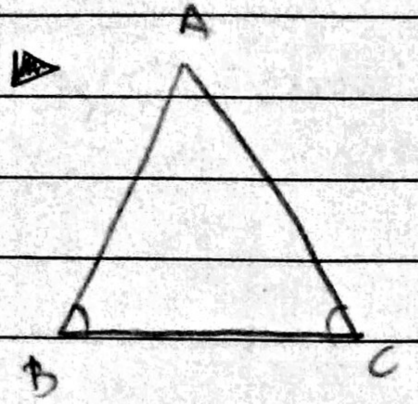
... ότι αποδείχτηκε στο ...



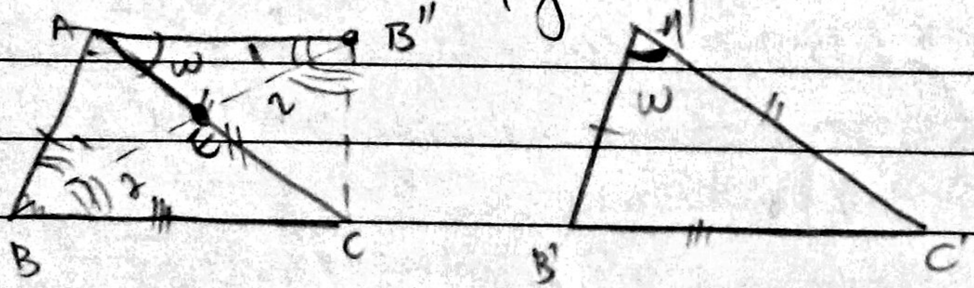

$A\overset{\triangle}{B}C \sim A\overset{\triangle}{C}B$

$\left.\begin{array}{l} BC \text{ κοινή} \\ \hat{B}=\hat{C} \\ \hat{C}=\hat{B} \end{array}\right\}$ $\underline{AB=AC}$

$\hat{B}=\hat{C} \Rightarrow \underline{AB=AC}$

3ο Κριτήριο Ισότητας

**Πρόταση**: Έστω δύο τρίγωνα που ισχύουν τα παρακάτω:




$\left.\begin{array}{l} AB=A'B' \\ BC=B'C' \\ AC=A'C' \end{array}\right\}$ τότε είναι ίσα τα τρίγωνα

Ν.δ.ο. ότι τα τρίγωνα είναι ίσα:

Από $I_4$) μεταφέρουμε την $\omega = B'\hat{A}'C'$ Έστω $C\hat{A}B''$

$(B'' \not\sim_{AC} B)$ & θεωρούμε σε $B''$: $AB''=A'B'=AB$ (μεταφορά ή την ...)

Συγκρίνουμε το $A\overset{\triangle}{B''}C$ με το $A'\overset{\triangle}{B'}C'$:

τα οποία είναι ίσα από το 1ο Κριτήριο. $\longrightarrow B''C = B'C' = BC$

$\& \ \hat{B}' = \hat{B}''$

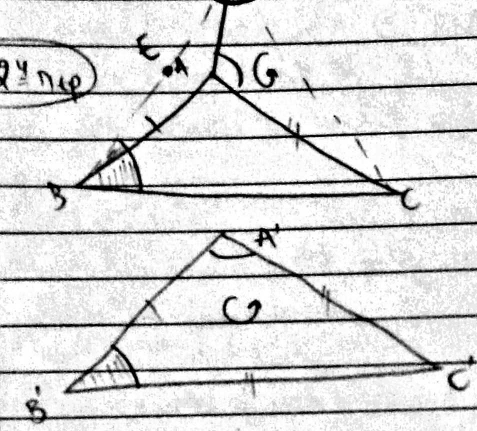
Άρα αρκεί νδο $\hat{B} = \hat{B}''$ που είναι προφανές.

1η περ) $E$: εσωτερικό του $AC$ (δηλ. $A * E * C$). $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{B}''_1 + \hat{B}''_2 \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}''$

Εφόσον $A\overset{\triangle}{B}B''$ ισοσκελές $\hat{B}_1 = \hat{B}''_1$ $\Big\} \xrightarrow[\text{γωνιών}]{\text{αθρ}}$

$\overset{\triangle}{CBB''}$ ισοσκελές $\hat{B}_2 = \hat{B}''_2$

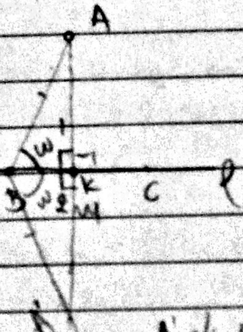
2η περ)




για $E$ εξωτερικό (θα γίνει διαφορά γωνιών)

(ή 3η περ) $A$: $\hat{A} = 1L$ το $E \equiv A$)

● Πρόταση/Άσκηση: θα δείξουμε ότι υπάρχει κάθετος (μοναδική) (με) στην ευθεία $\ell$ με $A \notin \ell$.




Λύση

$B, C \in \ell$ $A \notin \ell$, $B, C$ αυθαίρετα

$A, B, C$ ορίζουν τρίγωνο $A\overset{\triangle}{B}C$

$\&$ $A\hat{B}C$ ($0°$, $180°$)

$I_4$ & $\Sigma_1$) Μεταφέρω την $\omega$ με αρχή την $BC$ στο αντίθετο ημιεπίπεδο από το $A$, δηλ. $\exists A'$: $A\hat{B}C = A'\hat{B}C$ & $BA' = BA$

$A' \not\sim_\ell A$ άρα $\overline{AA'} \cap \ell \neq \phi$ $\Rightarrow \exists K$ στο εσωτ. του $\overline{AA'}$ με $K \in \ell$

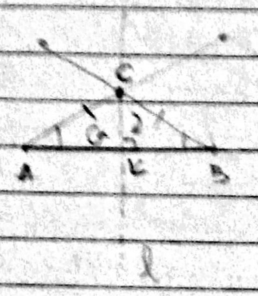
Βήμα
$BC A \cap \ell = \phi$

Συγκρίνω τα $A\overset{\triangle}{B}K$, $A'\overset{\triangle}{B}K$: είναι ίσα από 1ο Κριτήριο

$\Rightarrow \hat{K}_1 = \hat{K}_2$ παραπληρωματικές $\Rightarrow \hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 1L$

Άρα υπάρχει κάθετος

● **Πρόταση**: Κάθε ευθύγραμμο τμήμα $\overline{AB}$, έχει μέσο (μοναδικό)

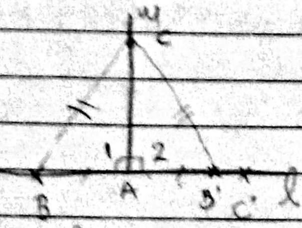



Σχηματίζουμε δύο γωνίες με τη δεύτερη να προέρχεται από μεταφορά της πρώτης, τέμνονται στο C, φέρνω κάθετη $(CK) \perp (AB)$

Από $\exists$ $A\hat{B}C$ ισοσκελές με βάση AB

και $A\hat{K}C = C\hat{K}B \Rightarrow \overline{AK} = \overline{KB}$

Άρα K μέσο, K: μοναδικό;




Έστω l, $A \in l$

Θδο $\exists$ μια ευθεία (μοναδική) $m \perp l$, $A \in m$

$B \in l \setminus \{A\}$ & $B' \sim_A B$

l υπάρχουν τρίγωνα A, B, C' παίρνω με μεταφορά ως AB την AB' τω $AB' = AB$ $(I_1)$

Υπάρχει ισοσκελές τρίγωνο με βάση BB', το $B\hat{B'}C$

Φέρνουμε το CA τότε $(CA) \perp l = (BB')$

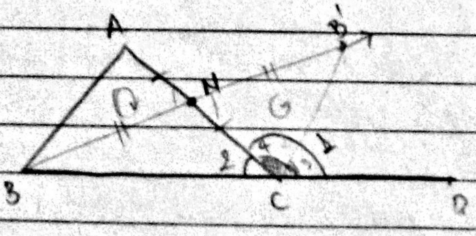
Αρκεί νδο $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

Συγκρίνουμε τα $A\hat{B}C$ & $A\hat{B'}C$ είναι ίσα (ίσες πλευρές)

Άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και εφόσον $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ παραπληρωματικές

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 1L \Rightarrow AC \perp l$

● **Πρόταση**: Έστω τρίγωνο $A\hat{B}C$ και αντικείμενη ημιευθεία ως προς το C. Τότε σχηματίζονται δύο γωνίες $(\hat{C}_1, \hat{C}_2)$ τότε $\hat{C}_1$ λέγεται εξωτερική γωνία του $A\hat{B}C$. Θ.δ.ο $\hat{C}_1 > \hat{A}$ & $\hat{C}_1 > \hat{B}$



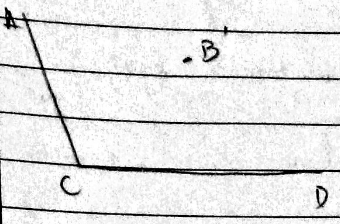

Έστω M μέσο του AC $(A * M * C)$.

Διαλέγω $B' \sim_M B$ : $MB' = MB$ $(I_1)$

Άρα 1º κριτήριο: $A\hat{B}M = M\hat{B'}C$

$\Rightarrow \hat{A} = \hat{C}_4$

Αρκει νδο $B'$ εσωτερικο σημειο της $A\hat{C}D$ (*)




Αρκει νδο:

1) $B' \underset{CD}{\sim} A^{\vee} \Leftrightarrow B' \underset{CD}{\sim} M \Leftrightarrow \overline{B'M} \cap (CD) = \emptyset$

$B \in (\overline{B'M}) \cap (CD) \overset{?}{=} \{B\}$

Αν $\overline{B'M} \cap (CD) \neq \emptyset$

$\supset \{B\} \rightarrow$

$B \in \overline{B'M}$ (ατοπο)

Αρα η ① ισχυει

2) $B' \underset{AC}{\sim} D$

① $B' \underset{BC}{\sim} A$

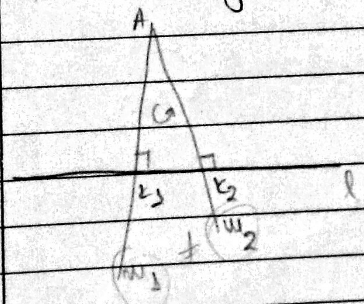
$(CD) = (BC)$ {γιατι $A, B, C$ συνευθειακα}

② $\left.\begin{array}{l} B' \underset{AC}{\sim} B \\ D \underset{AC}{\nsim} B \end{array}\right\} \Rightarrow B' \underset{AC}{\sim} D$ ✓.

(*) Αρα εχουμε $A\hat{C}B' < A\hat{C}D$

$\hat{A} < \hat{C}_1$

- Συνεχεια προηγουμενης προτασης (για αποδειξη μοναδικοτητας)



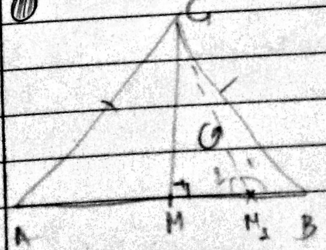

$A \notin \ell$ $\omega_1 \perp \ell$ & $\omega_2 \perp \ell$ ?

Αν $\omega_1 \neq \omega_2$ εχουμε τριγωνο $A\hat{\varepsilon}_1\varepsilon_2$

$\varepsilon_2 = 1L >$ απεναντι εσωτερικη $= \hat{\varepsilon}_1 = 1L$

Ατοπο (αθροισμα γωνιων < 180)

(III) M μεσο AB ειναι το M το μοναδικο μεσο;




Εστω $M_1$ μεσο του AB $(M_1B = M_1A)$

M μεσο του AB $(MA = MB)$

Θ.δ.ο $\hat{M}_1 = \hat{M}$

Συγκρίνουμε τα $\overset{\triangle}{ACM_{12}}$ κ' $M_{11}\overset{\triangle}{B}C$

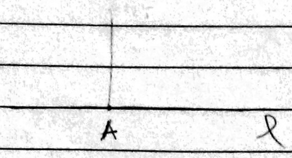
$N_1$ μέσο $\rightarrow N_1A = M_1B$
$CN_1$ κοινή
$AC = BC$

$\left.\right\}$ $\overset{\triangle}{ACM_{12}} = M_{11}\overset{\triangle}{B}C$

Άρα $\hat{M}_{12} = \hat{M}_{11}$ αφού παραπληρωματικές ίσες κ' $\hat{M}_{11} = \hat{M}_{2} = 1L$ δεν

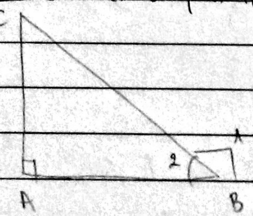
μπορεί διότι γιατί από το C μπορεί να φέρει μόνο μια ορθή.
Άρα $M \equiv M_1$ Δηλαδή έχουμε μοναδικό μέσο.

Η/Υ **Άσκηση**: Δίνεται ευθεία l κ' $A \in l$. ΝΔΟ $\exists!$ κάθετος στην l στο σημείο A.



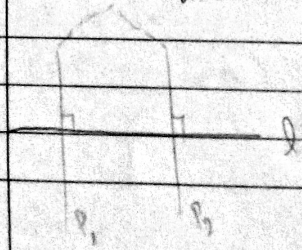

**Εφαρμογές**

Άσκηση ①: Δεν υπάρχει τρίγωνο με δύο ορθές γωνίες.



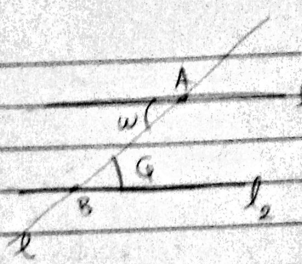

Γιατί η εξωτερική του B: $1L = \hat{B}_1$
τότε κ' $\hat{B}_2 = 1L$ ...

② Δύο ευθείες $l_1, l_2$ κάθετες στην ευθεία $l$, $l_1 \neq l_2$ είναι παράλληλες (δηλ. $l_1 \parallel l_2$)



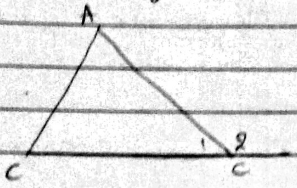

Γιατί θα σχηματιζόταν τρίγωνο
με 2 ορθές...

③ $l \cap l_1 = \{A\}$, $l \cap l_2 = \{B\}$, $\omega = \varphi$ $\Rightarrow l_1 \parallel l_2$ ;



Αν τέμνονται σχηματίζεται τρίγωνο, οπου $\hat{C}$

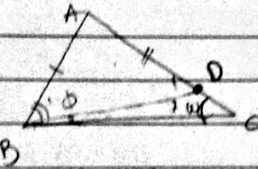
④ Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα 2 γωνιών είναι $< 2L$



$\hat{C}_1 + \hat{B} < 2L$

$\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 2L$

**ΛΗΜΜΑ** ① Εστω τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABC}$ κ $AC > AB$ Τοτε ισχύει οτι $\hat{B} > \hat{C}$



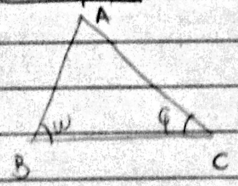
Απόδειξη

Εφόσον $AC > AB$ τοτε $\exists!\, D$ στο εσωτερικό του $AC$ τω $AD = AB$

(Επίσης $A * D * C$)

$\hat{\omega} < \hat{D}_1 = \hat{B}_1 < \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \phi$

Αντίστροφα: $\omega > \varphi \Rightarrow AC > AB$

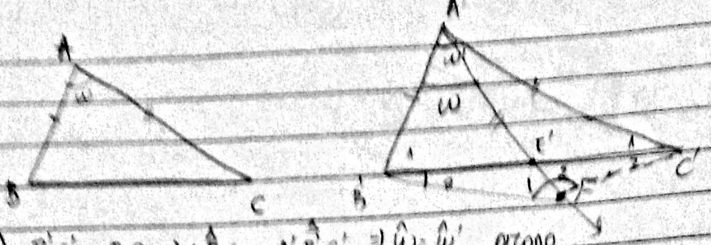


Αν δεν ισχύει το παραπάνω, τοτε:

$AC = AB$ (όχι γιατί $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$)

$AC < AB$ (όχι (από το ΛΗΜΜΑ) γιατί $\hat{\omega} < \hat{\varphi}$ άτοπο αφού $\hat{\omega} > \hat{\varphi}$!

② Εστω δυο τρίγωνα $\overset{\triangle}{ABC}$ κ $\overset{\triangle}{A'B'C'}$, έτσι ώστε $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ κ $\omega = \hat{A} \, \& \, \hat{A}' = \omega'$ Τοτε η απέναντι πλευρά από την γωνία $\hat{\omega}$ είναι μικρότερη της αντίστοιχης πλευράς στο ~~άλλο~~ άλλο τρίγωνο της γωνίας $\hat{\omega}'$



α' τρόπος

i) $B'C' = BC \Rightarrow \hat{ABC} = \hat{A'B'C'} \Rightarrow \hat{\omega} = \hat{\omega}'$ άτοπο

ii) $B'C' \neq BC$, δεν έχουμε πια για 2 τρίγωνα αφού γωνία άλλο τρόπο

β' τρόπος

Εφαρμόζουμε το $\hat{ABC}$ στο $\hat{A'B'C'}$

Διατάζουμε $F'$: $A'F' = AC$ $(I_1)$

& $B'\hat{A'}F' = B\hat{A}C$ $(I_4)$

Το ABC & $A'B'F'$ είναι ίσα (1ο κριτήριο)

Άρα $BC = B'F' \overset{(?)}{<} B'C'$

Δημιουργούμε το $B'\hat{F'}C'$ άρα ΝΔΟ $B'F' < B'C'$

(αφού $BC = B'F'$)

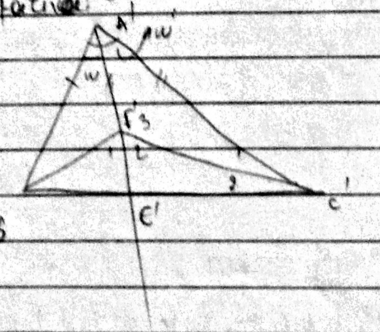
Άρα ΝΔΟ $\hat{F}_1' + \hat{F}_2' > \hat{C}_2'$

$A'F'C'$ ισοσκελές $\Rightarrow \underbrace{\hat{C}_1' + \hat{C}_2'}_{\hat{A}'\hat{C}_2'} = \hat{F}_2' < \hat{F}_1' + \hat{F}_2'$

Προσοχή: Έχουμε πάρει την περίπτωση $(A' * E' * F')$

Πώς γνωρίζω αν το $F'$ δεν είναι το εσωτερικό?

Σχηματικά:



$\hat{A'B'F'} = ABC$

$B'F' = BC$

Α?

$B'C'$

$A' * F' * E'$

& $B'F' < B'C' \Leftrightarrow \hat{F}_1 + \hat{F}_2 > \hat{C}_2'$

$B'\hat{F'}C'$

Στο $A'\hat{F}'C'$ ισοσκελές άρα $\hat{F}_3' = \hat{C}_1 \Rightarrow \hat{F}_2' > \hat{C}_1 = \hat{F}_3' > \hat{C}_2'$ (ως εξωτερική στο $F'E'C'$)

$\longrightarrow \hat{F}_1' + \hat{F}_2' > \hat{F}_2' > \hat{C}_2$

H/W

(III) Άσκηση: Απόδειξη ότι $\exists$ 1) 2) ! διχοτόμος σε κάθε γωνία